Successioni Numeriche

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to a_n$$

Funzione dei naturali a reali.

Esempio

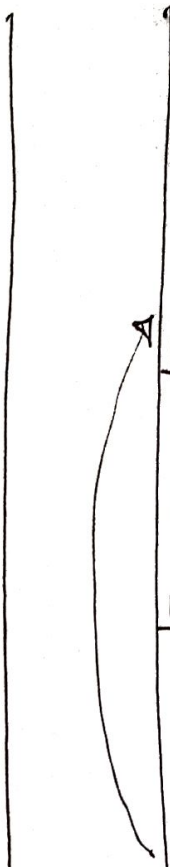
$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n}$$

$a_1 = 1$
$a_2 = \frac{1}{2}$
$a_3 = \frac{1}{3}$
$a_4 = \frac{1}{4}$

$\text{Dominio} = \mathbb{N}$

L'unico punto di acc. è a $+\infty$,
quindi l'unico limite che ha senso studiare è $\lim_{x\to+\infty} a_n$.

Come si accumulano i punti a $+\infty$?



Def. Limite per Successioni

Si dice $\lim a_n$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N |$

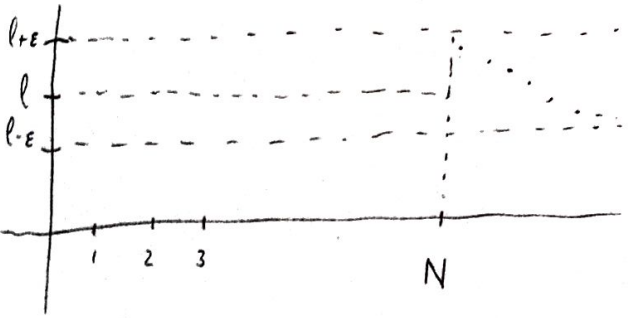
Si dice $\lim a_n$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ |

$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > N$

$n, N \in \mathbb{N}$

N grande

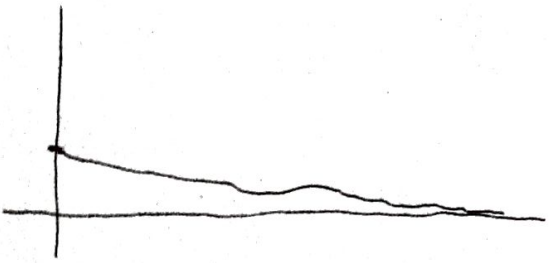
$x \to \infty$ si può ottenere



Divergente
Convergente all'infinito

Esempio

$\{a_n\} = \frac{1}{n}$



$\forall n > N$, trovo un $\frac{1}{n} \sim 0$?

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ ma $l = 0$

$\frac{1}{\varepsilon}$ potrebbe ~~non es~~ $\notin \mathbb{N}$

$\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{N}$?

Basta prendere $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Def. Parte intera

$[r]$ con $r \in \mathbb{R}$, si chiama parte intera di r.

Esempio

$[\pi] = 3$

Noi applichiamo 1 per essere sicuri che sia verificata.

N grande

Esempio

Se p vale per $x > \pi$, non

N grande

$x \to \infty$ si può ommettere

Esempio

Se p vale per $x > \pi$, non vale per $x > [\pi]$, ma vale certamente per $x > [\pi]+1$. Infatti $[\pi] < \pi < [\pi]+1$

Tipi di Serie

- Convergente $\lim a_n = \ell$ $\quad \frac{1}{n} \to 0$
- Divergente $\lim a_n = \infty$ $\quad n^2 \to \infty$
- Indeterminata se $\nexists \lim a_n$ $\quad -1^n \to ?$

Divergente
Convergente all'infinito

Def Limitatezza

a_n si dice limitata se $\exists M > 0 /$

$\forall n \in \mathbb{N} \; |a_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

oppure definitivamente limitata per $n > \mathbb{N}$

Nelle funzioni, f è limitata ~~dal~~ localmente dal suo stesso limite.

$\exists\, l \Rightarrow$ allora limitata, almeno localmente

f limitata $\not\Rightarrow \exists$ limite.

Esempio

sin x è limitata su tutto $\mathbb{R}$, ma non ammette limite per $x \to \infty$

Proprietà

Convergente $\Rightarrow$ limitata (almeno da un certo n in poi)

limitata $\not\Rightarrow$ convergente

Permanenza del segno

Se $\lim a_n = l > 0$ allora $a_n > 0$ da un certo n in poi.

Proprietà

da un certo n in poi.

Nota come sia la stessa definizione usata per le funzioni, ne nelle successioni l'unico intorno è ed ∞.

Non le dimostriamo, poiché abbiamo già dimostrato le stesse proprietà per le funzioni in generale.

Th. Carabinieri

$b_n \leq a_n \leq c_n$ sapendo che $\lim b_n = \lim c_n = \ell$

allora $\exists \lim a_n = \ell$

$b_n \leq a_n \leq c_n$ da un certo n in poi

Th. Confronto

Positivo
$a_n \leq b_n$ e sia $a_n \to +\infty$

allora anche $b_n \to +\infty$

Negativo — — — —
$b_n \leq c_n$ e sia $c_n \to -\infty$

allora anche $b_n \to -\infty$

Importante

Monotonia

$a_n \geq a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Succ. Rimane Crescente

$a_n > a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Succ. strettamente mon. crescente

Limite s. monotone

se a_n è crescente, allora

se a_n è crescente, allora

$\lim a_n$ è $\sup a_n$.

Se $\sup a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n$ convergente

~~se è limitata superiormente~~

Convergente se

{ mon. crescente / limitata sup } • { monotona decresc. / limitata inf.

Analisi (34)

Limiti (non propriamente notevoli) particolari.

Lui li chiama impropriamente notevoli, per analogia.

- $\sqrt[n]{a}$ con $a>0$ [per ora $a>1$] **caso $a>0$**

allora $\lim \sqrt[n]{a} = \lim a^{\frac{1}{n}} = 1$ (intuitivamente) ma va dimostrato!

Vedremo e casi!

Dimostrazione

▶ Premessa: Disuguaglianza di ~~Bernulli~~ Bernoulli

$(1+h)^n \geq 1+nh$ $\quad h>-1$ (perché $1+h>0$) $\quad n \in \mathbb{N}$

OPP Uso $\geq$ Bernoulli

Dim. per Induzione

Si verifica che sia vera per un n noto e poi si dimostra per un certo n in poi.

per $n=2$ $(1+h)^2 \geq 1+2h$ VERA! ~~Passo~~ Base.

$1+h^2+2h \geq 1+2h$

Mostriamo ora che sia vera per un generico.

per $n = n+1$

Mostrare

per $n = n+1$

$(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h$ VERA?

Supponiamola vera per n.

$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n \cdot (1+h) \geq (1+nh)(1+h) =$

↓ so che vale

$= 1+h+nh+nh^2 \geq 1+h+nh$

Quando non è possibile usare l'induzione, se per esempio non è già noto cosa dimostrare, allora si usa un altro approccio.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

per 4 $1+2+3+4 = 10$ VERO $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$

Induzione

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \text{Quindi vero!}$$

Importante

Ricordo ai
che è sempre p
$x \to \infty$

Lui li diceva impropriamente notevoli, per analogia.

Chi ha inventato la formula l'ha intuita prima di dimostrarla per induzione.

Gauss, quando l'ha inventata ha fatto prima la somma da 1 a 100, poi da 100 a 1, li ha messi in colonna e con poche semplificazioni ha ottenuto la formula.

Vedere a casa!

DB Uso $\geq$ Bernoulli

$\sqrt[n]{a} = 1$ poiché $a > 1$, con $h > 0$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (1+h)^n \Rightarrow a = (1+h) \overset{DB}{\geq} 1 + nh$$

$$\sqrt[n]{a} \geq (1 + nh)^{\frac{1}{n}}$$

se $n \to \infty$ $\quad 1 < \sqrt[n]{a}$

Proviamo a ricavare h:

$$nh \leq a - 1 \Rightarrow h < \frac{a-1}{n}$$

~~[illegible]~~ h sta [illegible] $h \to 0$!

$nh \leq a-1 \Rightarrow h \leq \frac{a-1}{n}$

~~confronto~~ basta far vedere che $h \to 0$!

Quando $n \to \infty$ $\frac{(a-1)}{n \to \infty}$ è positivo quando

$h \to 0$ e quindi $a \to 1$

Caso $0<a<1$ ponendo $a = \frac{1}{b}$ con $b>1$

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} \xrightarrow{n \to \infty} 1$

Importante

Progressione Geometrica: $1, q, q^2, \dots q^n, \dots$

q si dice **ragione della progressione**

$\{q^n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad n \longmapsto q^n$

Ricordo che n è sempre per $n \to \infty$

Studiamo $\lim q^n$:

$$\lim q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q|<1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ +\infty & q>1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

Dimostrazione $q^n \to 0$ se $|q| < 1$

1) Supponiamo $q < 1$, allora $q = \frac{1}{1+p}$, con $p > 0$

$$0 < q^n = \frac{1}{(1+p)^n} \overset{DB}{\leq} \frac{1}{1+np} < \frac{1}{np} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$$(1+p)^n \geq 1+np \Rightarrow q^n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

2) Caso banale

3) Caso $q > 1$

Se $q > 1$ allora $q = 1+p$, con $p > 0$

$$0 < q^n = (1+p)^n \overset{DB}{\geq} 1+np \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$

per confronto, anche $q^n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$

4) Caso $q < -1$ $\quad q^n = (-1)^n q^n$, con $q > 1$

$q = -1$ $\quad (-1)^n$

Poiché $(-1)^n$ oscilla qualunque $q^n = p \cdot (-1)^n$ oscilla.

Importante saper fare il confronto tra quantità.

Poiché $(-1)^n$ oscilla qualunque $q^n = p \cdot (-1)^n$ oscilla.

Esempio

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

— Fine digressione successioni, per ora

Confronto tra infiniti

$\sqrt{n}$, a^n $\quad a>1$

Cosa accade a $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n}$ = indeterminato $\frac{\infty}{\infty}$

$a = 1+h \to$ $0 < \frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n} \overset{DB}{\leq} \frac{\sqrt{n}}{1+nh} \to 0$ $\quad \frac{\sqrt{n}}{1+nh} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}+n\sqrt{n}h}$

$\frac{n}{\sqrt{n}+n\sqrt{n}h} \leq \frac{n}{n\sqrt{n}h} = \frac{1}{\sqrt{n}h} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ quindi per confronto anche $\frac{\sqrt{n}}{a^n} \to 0$

Cioè $a^n \to \infty$ più velocemente di $\sqrt{n}$.

Questo risultato è utile per confrontare n e a^n:

~~n e a^n~~

Importante saper fare il confronto tra quantità.

$\lim \frac{n}{a^n} = \frac{\infty}{\infty}$ → indeterminato

Ci riportiamo al caso noto: $\frac{n}{a^n} = \frac{\sqrt{n}^2}{\left[(\sqrt{a})^2\right]^n}$

~~Fatto~~ → $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{a}^n}\right)^2$

Poniamo $\sqrt{a} = b$ → $\frac{\sqrt{n}}{b^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

quindi anche $\frac{n}{a} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Questo ragionamento può essere usato per tutte le potenze di n.

Generalizzazione

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$

"Qualsiasi potenza è più lenta di qualsiasi esponenziale".

Generalizzazione ulteriore

Se al posto di n ~~c'è~~ ci posso una qualsiasi successione p_n, $\forall p_n \to +\infty$

$\lim \frac{p_n^k}{a^{p_n}} = 0$

Se al posto di n ~~dopo~~ ci posso una qualunque successione p_n, $\forall p_n \to +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(p_n)^k}{a^{p_n}} = 0$$

p_n può essere qualunque cosa purché vada all'infinito

Vale anche se $k = \alpha \in \mathbb{R}$.

Supponiamo ora di usare $p_n = \log_b n$, con $b > 1$

Sostituendo: $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_b n)^\alpha}{a^{\log_b n}} = 0$

Col log si scopre una cosa curiosa:

Vorrei avere $a^{\log_a}$. $\log_b n = \log_a n \cdot \log_b a$

$\log_b a = \beta \to$ irrilevante.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_b n)^\alpha}{a^{\log_a n \cdot \beta}} = \lim \frac{(\log_b n)^\alpha}{n^\beta} = 0$$

Quindi velocità: log < pow < exp

Scala: $\log n < n^a < a^n < n! < n^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Non dimostrate, vedi Libro.

Torniamo alle funzioni e cerchiamo qualcosa di analogo.

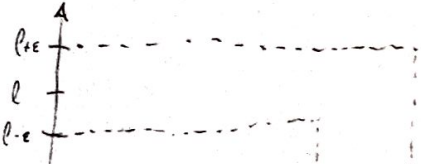
Teorema ~~Proposizione~~ - Limite di Fun. per Successioni

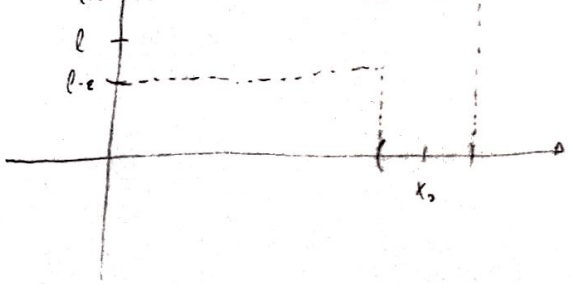
$f: X \to \mathbb{R}$, sia x_0 un p. acc. per X

allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ sse $\forall \{x_n\}$ e valori in $X \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0 si abbia

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

Talvolta si usa dalla proposizione come ulteriore definizione di limite.





$\{x_n\}$ è una successione di ascisse.

Quindi f calcolata nell'intorno di x_0 deve essere nell'intorno di l. È intuitivo notare come sia semplicemente la definizione di limite per $x \to x_0$ tramite $n \to \infty$

Questo teorema permette di sfruttare nelle funzioni i limiti mostrati per le successioni.

Quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_b x)^\alpha}{x^\beta}$$

Napier

Numero di Nepero (per tutti num. di Eulero)

$e = 2,718182\ldots$

Non dimostrato, vedi Libro.

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\quad e \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

$a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\vdots$

e

Talvolta si usa tale proposizione come ulteriore definizione di limite.

Domanda difficile per lo studente bravo:
Come far vedere che la successione è convergente?
Ha caratteristiche di monotonia?
Se cresc. + lim sup o decr + lim inf allora $\exists$ lim.

Notiamo prima che è monotona crescente.

$\frac{a_n}{a_{n-1}}$ deve essere $\geq 1 \rightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1}} =$

$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \Rightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}}{\frac{n+1}{n}} =$$

$$= \frac{\left[\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right]^{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{1-\frac{1}{n}} \overset{DB}{\geq} \frac{1-n\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1-\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \boxed{1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \Rightarrow a_n > a_{n-1}$$

Per vedere il limite studiamo le succ. seguente:

$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, mostriamo che b_n è decresc.

$b_1 = (1+1)^2 = 4$

b_n 4 decr.

a_n 2 cresce

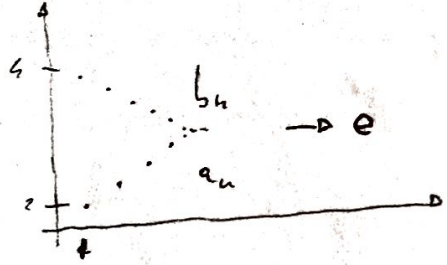
l'idea sarebbe che $b_n > a_n$,

infatti significherebbe che sup b sarebbe anche maggiorante di a_n e che a_n sarebbe più "lenta" di b_n

Analisi (34)

$b = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Graficamente:



$e \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} a_n$

Tratto a $\forall k$ so che $b_n < 4$

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow b_n > a_n$

b_n è monotona decrescente.

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} =$$

Ricordare se qual'è l'obiet

$b_{n-1}^{n} \quad \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n^2} \qquad \left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n} =$

Ricordare sempre qual'è l'obiettivo finale! In questo caso voglio trovare un $1+$ qualcosa

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}} =$$

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2\pm 1}{n^2-1}\right)^{n}} \geq \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}} \overset{BB}{\leq} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+n\frac{1}{n^2-1}}$$

ma $\frac{1}{n^2-1} \geq \frac{1}{n^2}$ quindi $\frac{1+\frac{1}{n}}{1+n\frac{1}{n^2-1}} \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{1+n\frac{1}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$

Poiché b_n decresce, ~~esiste~~ $b_n > a_n$, allora b_n limita a_n, quindi esiste $\lim a_n$ e è finito quello di b_n.

Potrebbero convergere a limiti differenti.

ma $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$!

Infatti:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left[1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right] =$$

Metto a fattor comune so che $b_n < 4$!

$$= b_n\left[1-\frac{n}{n+1}\right] = b_n\left[\frac{n+1-n}{n+1}\right] = b_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \le \frac{4}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e$

L'errore è sempre $\le \frac{4}{n+1}$

Detta stima dell'errore di approssimazione

Ricordare sempre qual'è l'obiettivo

Scelgo fissare un certo n ed

Ricordare sempre qual'è l'obiettivo finale! In questo caso voglio trovare un 1+ qualcosa.

Esempio Si può fissare un certo n ed ottenere un valore approssimato di e compiendo un errore $\leq \frac{4}{n+1}$.

Limite notevole di e

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ma anche $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Metodo di sostituzione della variabile

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

1

Abbiamo intuitivamente applicato il metodo sost.

Sia $(g\circ f)(x)$ $X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{y\to l} g(y) = k$

allora

$\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = k$

Esempio

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$, sostituiamo $\left(\frac{1}{x}\right) = y$

cosa fa y quando $x \to \infty$? $y \to 0$!

Quindi procediamo a risolvere:

$\lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$

Esempio

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to \infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}$, con $y = \frac{1}{x}$

quindi $\lim_{y \to \infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \mathbf{e}$

Massimo e Minimo limite

Come nelle funzioni, se $\nexists$ lim, possiamo creare lim dx e lim sx, nelle successioni [illegible] analogo.

Come nelle funzioni, [illegible]
cercare lim dx e lim sx, nelle successioni
possiamo trovare qualcosa di analogo.

Esempio

$a_n = (-1)^n \quad \nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^n$, ma è diverso da $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^2$!

Entrambe sono indeterminate, ma in maniera differente.
Come possiamo capire cosa succede?

$(-1)^n \to (-1)^{2n} = 1$ sono estratte dalla
$\searrow (-1)^{2n+1} = -1$ successione di partenza,

e la legge che ho scelto è di analizzare separatamente
tutte le posizioni pari e tutte le dispari.

Def. Sotto successione (o succ estratte)

a_{k_n} si dice estratta da a_n se

k_n è una successione crescente di naturali.

Nell'esempio precedente:

$(-1)^{2n} \to k_n = 2n$

$(-1)^{2n+1} \to k_n = 2n+1$

Si può dimostrare che a_n è convergente sse tutte le succ estratte sono convergenti.

[redacted] $a_n \to l \iff a_{k_n} \to l \ \forall k_n$

Valore limite di una succ.

l si dice essere un valore limite di a_n se succedono le seguenti cose:

- $\exists\, a_{k_n} \to l$

an se succedono le seguenti

- $\exists\, a_{k_n} \to l$
- $\exists$ infatti a_n tutti uguali a l

$\Rightarrow$ l è un p. di acc. per a_n

Esempio

-1 ed 1 sono valori limite

per $a_n = (-1)^n$.

Def Classe limite

L'insieme dei valori limite si chiama classe limite. Si può dimostrare che la classe limite è un insieme chiuso e limitato, e quindi $\exists$ max e min di classe limite, e li chiamo Massimo Limite e Minimo Limite

Denotati:

- $\max \lim_{n\to\infty} a_n$ / $\min \lim_{n\to\infty} a_n$
- $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ / $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ ← Not. P. Salso.
- $\limsup_{n\to\infty} a_n$ / $\liminf_{n\to\infty} a_n$

Analisi (36)

Esempio

$a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \qquad a_{4n} = \sin(\pi) = 0$

[redacted]

martedì - 2 scritti
ALG invece di MAT.

2 dic - [redacted]
ALG invece
di MAT

Proposizione $\overline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, a_n$

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \iff \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$
- se a_n è limitata, allora [redacted]

$\exists\ a_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} l$ ed $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \vee l = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

Max (min) limite per fun

Supponiamo che $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, allora posso considerare il massimo (minimo) limite.

$\lim_{x \to x_0} f(x)$

posso considerare il massimo (minimo) limite.

l è un valore limite per $f(x)$ con $x \to x_0$

se $\exists \{x_n\} \in X \setminus \{x_0\} \mid x_n \to x_0 \wedge f(x_n) \to l$

Significa che esiste una [redacted] seq. di ascisse vicine a x_0 | la fun va a l per tali valori.

Per l'anale, cercate di fare un disegno o un esempio di cosa significa.

<u>Esempio</u>

$\nexists \lim_{x \to \infty} \sin(x)$, ma nei multipli di $\frac{\pi}{2}$ $f \to 1$

Quindi $\exists$ una classe limite composta da tutti questi valori. $\overline{\lim_{x \to \infty}} \sin x = 1$, $\underline{\lim_{x \to \infty}} \sin x = -1$

Si può scegliere qualunque ε, ma scegliere 1 è comodo.

In

Esempio

$f(x) = x \sin x$, $\exists \lim_{x \to \infty} f(x)$

in questo caso $\nexists \lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to \infty} f'(x)$ è

Esempio

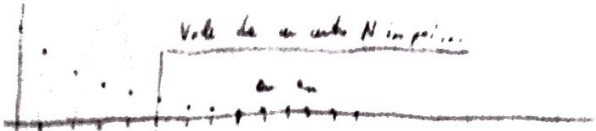
$\frac{\sin(x)}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Successioni particolari, di Cauchy - Fondamentali

Def.

a_n si dice di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \mid$
$|a_n - a_m| < \varepsilon$ per $n, m > N$.



Se da un certo N in poi, ovvero se

N

Se da un certo N in poi, ovunque mi collochi, la distanza tra ~~[illegible]~~ a_n e a_m è infinitesima.

per l'esame, cercate di fare un disegno o un esempio di cosa significa.

Prop.:
Se a_n è di Cauchy $\Rightarrow$ è limitata.

Dimostrazione

tesi: $|a_n| < M$? (cioè è limitata)
Scelgo $\varepsilon = 1$, e per $\varepsilon = 1$ $\exists N_0 \mid |a_n - a_m| < 1$ se $n, m \geq N_0$.

Si può scegliere qualunque ε, ma scegliere 1 è comodo.

Poiché vale da N_0 in poi, $|a_n - a_{N_0}| < 1$.
In questo modo non devo più considerare m.
$-1 \leq |a_n - a_{N_0}| \leq +1 \Rightarrow a_{N_0} - 1 \leq |a_n| \leq a_{N_0} + 1$

Quindi da a_{N_0} in poi a_n è limitata.
Cosa fare per gli altri (prima di N_0)?

Prendo il massimo $|a_n|$ con $n < N_0$

Analisi (SE)

Prendo il più grande $|a_n|$ con $n < N_0$

allora $a_n < a_{N_0} + 1 + \max_{n \le N_0} |a_n|$ ✓

Volendo possiamo prendere $\max\left(a_{N_0} + 1, \max_{n \le N_0} |a_n|\right)$,

ma il testo lo svolge così.

In ogni caso non fa molta differenza perché [redacted] era trovare un M limitante.

Ci tiene molto alla proprietà di Cauchy

Th. di Cauchy

Se a_n è di Cauchy $\Longleftrightarrow$ a_n è convergente.

Dimostrazione a_n [redacted] $\Longrightarrow$ a_n converge

Dunque se non è di Cauchy o diverge o è indeterminato

Ip: è di Cauchy.

Th: converge, cioè $|a_n - \ell| < \varepsilon$?

Sappiamo che se a_n è di Cauchy $\Rightarrow$ è limitata.

Ma da tutte le successioni limitate è possibile estrarre una sottosuccessione [redacted] a_{k_n} che converge ad un certo ℓ.

Dimostrazione

estrarre una sottosuccessione a_{k_n} che converge ad un certo ℓ.

$$|a_n - \ell| = |a_n + a_{k_n} - a_{k_n} - \ell| \overset{DT}{\leq} |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell|$$

Disuguaglianza triangolare

$|a_n - a_{k_n}| < \varepsilon$ perché a_n è di Cauchy e quindi $\exists$ un certo indice dal quale è vero.

$|a_{k_n} - \ell| < \varepsilon$ perché sottosucc. conv.

Dimostrazione a_n converge $\Rightarrow$ a_n Cauchy

$$|a_n - a_m| = |a_n + \ell - \ell - a_m| \overset{DT}{\leq} |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \varepsilon$$

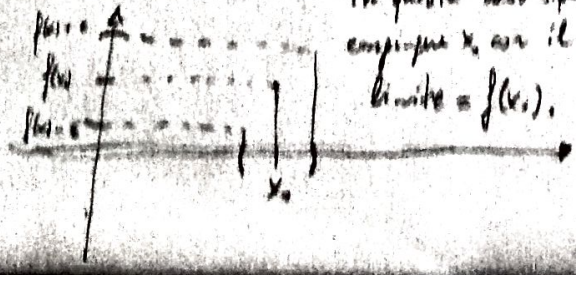
Fine Successione

Def Funzioni continue (1)

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in X$, x_0 è p. acc.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

In questo caso si può congiungere x_0 con il limite $= f(x_0)$.



Ci tiene molto alla proprietà di Cauchy

Esempio

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 11 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 11$

Quindi se non è di Cauchy o diverge o è indeterminato

La continuità è sempre riferita ad un singolo punto, sempre locale. Una funzione si può anche dire che sia continua $\forall x \in X$.

Esiste un'altro tipo di continuità che invece si applica a intervalli del dominio, essa è la continuità uniforme, che vedremo in seguito.

Disuguaglianza

del dominio, esso è la continuità uniforme, che vedremo in seguito.

Disuguaglianza triangolare

(2) Def. per intorni f. continue

$\forall V_{\{f(x_0)\}} \exists U_{x_0} \mid f(x_0) \in V_{f(x_0)}$ se $x \in U_x \cap X$

(3) Def. ——— f. continue

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) \mid |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ se $|x - x_0| < \delta$

(4) Def. per successioni f. continue

$\forall x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$ si ha $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$ con $x_n \in X$

Esempio

$f(x) = \sin(x)$

Controlliamo

$\sin(x_0+h) - \sin(x_0)$ e ci chiediamo se sia $> \varepsilon$ quando h è piccolo.

Uso formule di prostaferesi

$$2 \sin\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right)$$

$$2 \left|\sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x_0+h}{2}\right)\right| \leq 2 \left|\sin\left(\frac{h}{2}\right)\right|$$

perché il cos è sempre ≤ 1. Ma ora osserviamo che se l'angolo è piccolo, anche la funzione del seno è piccola.

$2\left|\sin\left(\frac{h}{2}\right)\right| < 2\frac{h}{2} = h$. Quindi se prendo $\varepsilon = h$ la funzione è continua in x_0, ma

$\varepsilon = h$ la funzione è continua in x_0, ma poiché x_0 è un qualsiasi punto di X, f è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

Esempio

$f(x) = x^2$ vediamo su $[0, 1]$

$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$? se $|x - x_0| < \delta$?

$|x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0||x + x_0|$

$|x + x_0|$ è la somma di due ascisse in $[0, 1]$, quindi $|x + x_0| \leq 2$

quindi $|x - x_0||x + x_0| \leq |x - x_0| \cdot 2 \rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Quindi per $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ la funzione è continua in $\forall [0, 1]$.

$|x^2 - x_0^2| \leq 2|x - x_0|$ quindi se $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ poiché $|x - x_0| < \delta$.

Ricerca ε per Limite: l'importanza risiede nel confronto tra le ascisse e le ordinate.

Def Continuità da dx e da sx

f è $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Proposizione

Uso formule di prostaferesi

f è continua in x_0 sse è continua sia da destra che da sinistra.

Continuità di sis. lin. di fun.

Funzione $f: X \to \mathbb{R}$ continua su tutto X.

$c \cdot f \longrightarrow c \cdot l$

$f + g \longrightarrow l_1 + l_2$

Le combinazioni lineari di funzioni continue sono sempre continue.

L'insieme di tutte le funzioni continue in tutto X è uno spazio vettoriale e si denota $C^0(X)$.

si denota $C^0(X)$.

$C^0(X)$ è infinito.

Anche $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \to x_0} g(f(x_0))$

Ricerca e per Limite: l'importanza risiede nel confronto tra le ascisse e le ordinate.

Casi in cui la cont. non è verificata

Si dicono discontinuità se $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Esistono 3 ordini di discontinuità.

Discontinuità eliminabili

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 14 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 14$

Per eliminare questa discontinuità è sufficiente modificare la funzione in x_0.

Disc. eliminabile: se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ma $l \neq x_0$.

Nel calcolo del limite si usa il valore della funzione nell'intorno di [redacted] x_0.

Non NO DAT! Si nemmeno Mercoledì!

Discontinuità di prima specie (o salto)

Esempio $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x) \to \nexists$

Disc. prima specie: se $\exists \lim$ e $\lim$ ma sono diversi

$x \to x_0$

Disc. prima specie: se $\exists \lim_{x \to x_0^+}$ e $\lim_{x \to x_0^-}$ ma sono diversi

Salto in x_0, $S(x_0) = \left| \lim_{x \to x_0^+} - \lim_{x \to x_0^-} \right|$

se f fosse $= \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ sarebbe comunque DPS

Discontinuità di seconda specie

Esempio $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \neq 0$

$f(x) = 1$ in $x = 0$

$\nexists \lim_{x \to x_0}$, $\lim_{x \to x_0^-}$, $\lim_{x \to x_0^+}$ Non esiste il limite e non esiste almeno uno tra i limiti dx o sx

Disc. seconda specie: se $\nexists \lim_{x \to x_0}$ e almeno uno dei limiti dx o sx non esiste o è infinito.

Nel calcolo del limite si usa il valore della funzione nell'intorno di x_0

Non NO DAT! Si recupera Mercoledì!

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$$

D2S

Esempio — la classica

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

0 potrebbe essere D2S perché $\lim_{x \to 0^+} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} = -\infty$. Tuttavia la funz in 0 non è definita. Tra i testi si può certamente incontrare. Alcuni sorvolano sul fatto che non sia definita la funzione e la classificano come D2S, mentre in altri, tra cui prof. e P. Salsa, non ha senso parlare di discontinuità luogo che

tra cui prof. e P. Salsa, non ha senso parlare di discontinuità dove la f non è definita.

Teorema disc. fun. monotone

Una funzione monotona, [redacted] ~~per~~ $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, alla peggio ha DSE in a e b, DIS tra i punti interni, in una quantità al più, infinitamente numerabile.

Numerabile

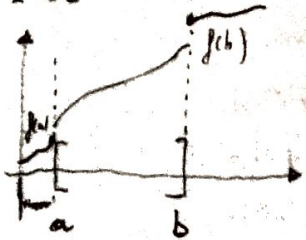
Se ho infiniti elementi, ma li posso mettere in relazione ~~con~~ biunivoca con i naturali.

"Li posso enumerare".

Analisi 60

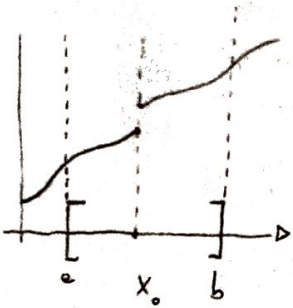
Dimostrazione

$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$ $\lim_{x \to b^-} f(x) \neq f(b)$



DSE

Funzione con ~~salti~~ agli estremi.



Funzione con salti (DS1) in p. interni.

Non può avere DS2, perché essendo monotona non può non avere limite e neppure un limite infinito.

Il salto complessivo della funzione è $S = f(b) - f(a)$.

$S \in \mathbb{R}$. Prendiamo la parte intera di S: $[S]$.

$S \in \mathbb{R}$. Prendiamo la parte intera di S: $[S]$.

Quanti salti di ampiezza ≥ 1?

Posso fare al massimo $[S]$ salti ≥ 1.

Quanti ~~di ampiezza~~ $\frac{1}{2} \leq \overset{amp.}{*} \leq 1$? $2 \cdot [S]$ salti.

Quanti $\frac{1}{4} \leq amp. \leq \frac{1}{2}$? $4 \cdot [S]$ salti

Quindi è un'infinità numerabile.

∞ numerabile.

Si dimostra analogamente per f. mono. decrescenti.

Esempio

Dirichlet

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \nexists \lim_{x \to x_0} \chi(x)$$

[redacted] infinita quantità (non numerabile) di DS2.

Teorema degli zeri

1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua
2. $f(a)f(b)<0$

Tesi: $\exists c\in(a,b)\mid f(c)=0$

Dimostrazione per dicotomia (per divisioni successive)

prima parte

Supponiamo $f(a)<0$ e $f(b)>0$.

Divido a metà e vedo se $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$.

Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ controllo

tra $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ e $f(b)$, altrimenti cerco tra

$f(a)$ e $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. E così via...

Se si arresta ho finito.

Se non si arresta dimostro che gli intervalli convergono in un punto.

$a_1\le a_2\le a_3\le\dots\le a_n\le b_n\le b_{n-1}\le\dots\le b_1$

$\lim_{n\to\infty} a_n = ?$ $\lim_{n\to\infty} b_n = ?$

Sappiamo che il limite esiste perché

$\lim_{n\to\infty} a_n = ?$ $\lim_{n\to\infty} b_n = ?$

Supponiamo che il limite esiste poiché

la funzione è limitata superiormente ed inf.

$\lim_{n\to\infty} a_n = c_1$ $\lim_{n\to\infty} b_n = c_2$

Dimostriamo che $c_1 = c_2$.

$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ quindi

$\lim b_n - \lim a_n = 0 \Rightarrow \lim b_n = \lim a_n$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = c$

Seconda Parte

$f(c) = 0$? Calcoliamo $f(c)$!

$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

$f(c) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n)$. Ma $\lim_{x\to x_0} f(x_n) = f(x_0)$, $x \to x_0$.

Quindi per continuità: $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$,

ma $\lim b_n \geq 0$ e $\lim a_n \leq 0$, ma $\lim a_n = \lim b_n$

e quindi $f(c) = 0$

Analisi (41)

$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ e si trova c con un errore massimo di $\frac{b-a}{2^n}$.

Le due condizioni sono [redacted] sufficienti ma non necessarie.

Nov. Merc. 30 recupero dalle 9-11

Dic. 2 recupero Geometria

Osservazione

Si può dire che la funzione sia continua quando non è definita?

Si può fare una forzatura:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Talvolta situazioni di questo tipo sono considerate continue anche se la fun non è definita.

Metti in Discontinuità

Valutare i corsi!

Non perdere di vista l'obiettivo del corso!

Teorema

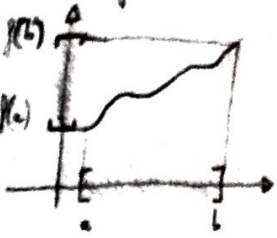
L'immagine di un compatto tramite f continua è ancora un compatto.

L'immagine di un compatto tramite f continua è ancora un compatto.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $[a,b]$

I compatti in $\mathbb{R}$ sono solo i chiusi e limitati.

TESI $f([a,b])$ è un compatto, cioè, in $\mathbb{R}$ è chiuso e limitato.



Conseguenza immediata

f continua su un compatto, $\Rightarrow f$ è limitata

Q.1) (Fermat

Teorema di Weierstrass (conseguenza più interessante)

f continua su $[a,b] \Rightarrow$ ha max e min.

Nov. Mac. 30 recupero dalle 9-11

Dic. 2 recupero Geometria.

Metti in ← Discontinuità

Valutare i corsi!

Non perdere di vista l'obiettivo del corso!

Dimostrazione

Per il th. precedente, $f([a \to b])$ è chiuso e limitato.

$f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$.

Se è limitato, $\exists \sup f([a,b]), \inf f([a,b]) \in \mathbb{R}$.

[redacted]

Ma poiché sup e inf sono p. acc. per $f([a,b])$

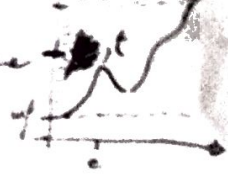
[redacted] e poiché $f[(a,b)]$ è chiuso, e di conseguenza contiene tutti i suoi p. acc., allora sup e inf $\in f[(a,b)]$, quindi sup = max e inf = min.

Teorema dei valori intermedi

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ continua.

Tesi: f assume tutti i valori tra [redacted], t

Tesi: f assume tutti i valori tra $\inf_{(a,b)} f$ e $\sup_{(a,b)} f$.



I compatti in $\mathbb{R}$ sono solo i chiusi e limitati.

Dimostrazione

~~Prendo un t a caso $\in f((a,b))$ e faccio~~

ve Prendo un c a caso $\in (a,b)$ e faccio vedere che $t = f(c) \in f((a,b))$. (preso un t a caso)

$\inf f < t < \sup f$

$\exists\, x_1, x_2 \in (a,b) \mid \inf f < f(x_1) < t < f(x_2) < \sup f$.

Sia $g(x) = f(x) - t$. Poiché $f(x)$ è continua, anche $g(x)$ è ovviamente continua.

Q.1) (Premura!)

$g(x_1) = f(x_1) - t \to f(x_1) < t \Rightarrow f(x_1) - t < 0$

$g(x_2) = f(x_2) - t \to t < f(x_2) \Rightarrow f(x_2) - t > 0$.

Ma per th. zeri $\exists\, c \in (x_1, x_2) \mid g(c) = 0$.

Ma $g(c) = 0 = f(c) - t$ che quindi $\in f((a,b))$.

Teorema di Darboux ([redacted] conseguenza)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.
Tesi: f assume tutti i valori tra max e min.

Dimostrazione

Corollario th. dei valori intermedi e th. di Weierstrass.

Continuità uniforme

Esempio

$f = x^2$ è continua in $[0,+]$, infatti
$|x^2 - x_0^2| = |x+x_0| \cdot |x-x_0| \leq 2|x-x_0| < 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2}$

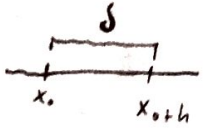
Questo si può fare solo su intervalli limitati in $\mathbb{R}$.
Se $[0, +\infty)$:

$|(x_0+h)^2 - x_0^2| = |x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2| = |2hx_0 + h^2| \geq$

$\geq |2hx_0|$ ma vorrei questo quantità $< \varepsilon$.

$\geq |\varepsilon h x_0|$ ma vorrei questa quantità $< \varepsilon$.

Non lo posso fare, a meno che io non decida chi è x_0.

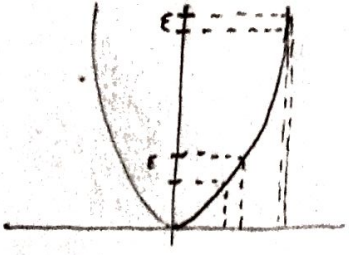


In funz solo di ε

Per ogni punto che io scelgo, troverò un δ che è diverso.

Nel caso limitato, la dimostrazione funziona sempre, indipendentemente da x_0.

Nel caso non limitato, δ varia dipendentemente da x_0.



Tenendo fisso ε, trovo un δ che vada bene per tutti i punti in un intervallo limitato.

Nel caso all'infinito invece bisogna regolare δ.

Se invece troviamo una f in cui e dipende solo da δ, (e non da x_0) allora essa è continua uniforme.

Quindi questa proprietà non è più locale.

$f(x) = \frac{1}{x}$ su $(0, 1)$

$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$?

$\left|\frac{x_0 - x}{x x_0}\right| < \varepsilon$? se vero $\Rightarrow -\varepsilon < \left|\frac{x_0 - x}{x x_0}\right| < \varepsilon$

$\rightarrow -\varepsilon x_0 < \left|\frac{x_0 - x}{x}\right| < \varepsilon x_0 \rightarrow -\varepsilon x_0 < \left|\frac{x_0}{x} - 1\right| < \varepsilon x_0 \rightarrow$

$-\varepsilon x_0 + 1 < \left|\frac{x_0}{x}\right| < 1 + \varepsilon x_0 \rightarrow \frac{1}{1+\varepsilon x_0} < \left|\frac{x}{x_0}\right| < \frac{1}{1-\varepsilon x_0} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{x_0}{1+\varepsilon x_0} < x < \frac{x_0}{1-\varepsilon x_0} \xrightarrow{-x_0} \frac{x_0 - x_0 - \varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0} < x - x_0 < \frac{x_0 - x_0 + \varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0}$

$\rightarrow \frac{-\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0} < x - x_0 < \frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0}$

Come vediamo non è possibile eliminare x_0!

Qui il problema è vicino allo 0, non dall'∞.

Definizione Uniforme Continuità

Definizione Uniforme Continuità

In funz. solo di ε.

$\forall x_0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) \mid \forall x, x_0 \in X$

si abbia $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ se $|x - x_0| < \delta$.

In qualunque punto io scelga l'intervallo, vale con lo stesso delta. Infatti non è locale ma riferita all'insieme.

f è continua allo stesso modo su ~~tutto~~ X.

☞ **Teorema di Heine-Cantor**

f continua su compatto $\Rightarrow$ unif. continua sul compatto.